Feuille n° 1 : Nombres réels, inégalités

Dans cette feuille, l'usage de la calculatrice est proscrit.

Préliminaires

Exercice 1

Les nombres suivants sont-ils rationnels : $\frac{1}{2}$, -1, 3, $\sqrt{2} - \frac{13}{9}$? On admettra que $\sqrt{2} \notin \mathbf{Q}$.

Exercice 2

A-t-on, pour tous entiers strictement positifs a, b, c et d,

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a+c}{b+d} \quad ?$$

Exercice 3

Écrire les nombres rationnels suivants sous la forme $\frac{a}{b}$ avec $a \in \mathbf{Z}$ et $b \in \mathbf{N}^*$:

$$\frac{9}{4} - \frac{13}{3} + \frac{11}{6}\,, \quad \frac{2}{1 - \frac{30}{29+\frac{1}{2}}} + \frac{1}{8}\,.$$

Exercice 4

Soient a et b deux réels avec b non nul. Le nombre $\frac{a}{b}$ est-il nécessairement rationnel ?

Exercice 5

Illustrer graphiquement l'égalité suivante :

$$\forall (x, y, z, t) \in \mathbf{R}^4\,, \quad (x + y)(z + t) = xz + xt + yz + yt\,.$$

Exercice 6

Lequel des deux réels $\dfrac{10^{20}}{1 + 10^{20}}$ et $1 + 10^{-20}$ est le plus proche de 1 ?

Exercice 7

Soit $\alpha \in]0, 1]$ et $I_\alpha =]-5-\alpha, -5+\alpha[$. Déterminer α pour que, si $x \in I_\alpha$, alors $\left|\dfrac{x+5}{x+3}\right| < 10^{-2}$.

Inégalités

Exercice 8

Représenter graphiquement les ensembles suivants :

$$\{x \in \mathbf{R} : |x - \sqrt{2}| \leq 1\}\,, \quad \{x \in \mathbf{R} : |x + 3| > 5\}\,.$$

Exercice 9

1. Résoudre dans $\mathbf{R}$:

$$|x - 3| + |x + 4| \leqslant 7\,.$$

2. Résoudre dans $\mathbf{R} \setminus \{-1, 1\}$:

$$0 \leqslant \frac{x}{x^2 - 1} \leqslant 1\,.$$

Exercice 10

1. Montrer que, pour tous les réels x et y, on a

$$2|xy| \leqslant x^2 + y^2 .$$

2. Déterminer l'ensemble des $(x, y) \in \mathbf{R}^2$ tels que

$$2|xy| = x^2 + y^2 .$$

Exercice 11

Soit $(x, y) \in \mathbf{R}^2$. On suppose que $|x - 1| \leqslant 2$ et que $-5 \leqslant y \leqslant -4$. Fournir un majorant et un minorant pour chacun des nombres suivants

$$x + y, \quad x - y\,, \quad xy\,, \quad \frac{x}{y}\,, \quad |x| - |y|\,.$$

Exercice 12

Pour $(x, y) \in \mathbf{R}^2$, on pose $N_1(x, y) = |x| + |y|$, $N_2(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ et $N_\infty(x, y) = \max(|x|, |y|)$. Montrer que pour tous les réels x et y, on a :

$$N_\infty(x, y) \leqslant N_2(x, y) \leqslant N_1(x, y) \leqslant 2N_\infty(x, y)\,.$$

Exercice 13

A-t-on, pour tous $a, b \in \mathbf{R}$, $(a + b)_- = a_- + b_-$?

Exercice 14

Montrer que, pour tous $a, b \in \mathbf{R}$, on a :

$$|\sqrt{a_+} - \sqrt{b_+}| \leq \sqrt{|a - b|}\,.$$

Intervalles

Exercice 15

Les ensembles suivants sont-ils des intervalles :

$$[0, 3[\cap]3, 1[\,, \quad [0, 3[\cup]3, 1[\,, \quad \mathbf{Z}\,, \quad \mathbf{Q}\,, \quad \{x \in \mathbf{R} : x^4 \geq 1\} \quad ?$$

Exercice 16

Existe-t-il un intervalle qui ne contient aucun nombre rationnel ?

Exercice 17

1. L'intersection de deux intervalles est-elle un intervalle ? Et la réunion ? Et la réunion de deux intervalles qui s'intersectent ?

2. Trouver deux intervalles dont l'intersection est vide et dont la réunion est un intervalle.

Exercice 18

On considère les ensembles suivants :

$$A = \{x \in \mathbf{R} : (x^2 - 1)_+ \leq 1\}\,, \quad B = \{x \in \mathbf{R} : (x^2 - 1)_+ > 2\}\,.$$

1. Représenter graphiquement A et B.

2. Peut-on écrire A et B comme des unions finies d'intervalles disjoints ?

3. Que vaut $A \cup B$? Et $A \cap B$?

Majorants, minorants, bornes supérieures et inféreures

Exercice 19

Soit
$$E = \left\{ \frac{201}{17}\,, \quad -23\,, \quad \frac{145}{12}\,, \quad 9\sqrt{3}+\frac{111}{12}\,, \quad 20\,, \quad -\frac{231}{11} \right\}.$$
Donner le maximum et le minimum de E. Si on est amené à utiliser une approximation, on la démontrera.

Exercice 20

Existe-il un entier naturel majorant tous les réels ? Existe-t-il un réel majorant tous les entiers naturels ?

Exercice 21

Soit X une partie de $\mathbf{R}$ pour laquelle il existe $M \in X$ tel que :
$$\forall x \in X\,, \quad x \leq M\,.$$
Montrer qu'un tel M est unique. On l'appelle le maximum de X.

Exercice 22

1. Montrer que, pour tout $(x, y) \in [-1, 1]^2$, on a $x + y + 3 \neq 0$.

2. On considère le sous-ensemble A de $\mathbf{R}$ défini par :
$$A = \left\{ \frac{x-y}{x+y+3} \,:\, x \in [-1,1],\, y \in [-1,1] \right\}.$$
Trouver un majorant et minorant de A.

Exercice 23

Soient A et B deux parties non vides de $\mathbf{R}$. On pose :
$$A + B = \{a + b\,, a \in A\,, b \in B\}\,.$$
On suppose que A et B sont majorées.

1. Montrer que $A + B$ est majorée.

2. Montrer que $\sup(A + B) = \sup(A) + \sup(B)$.

Exercice 24

Soit r un réel strictement positif. On introduit $A = \{x \in \mathbf{R} : x^2 \leq r\}$. Montrer que A est une partie de $\mathbf{R}$ non vide et majorée. Notant S sa borne supérieure, montrer que $S^2 = r$.

Exercice 25

Soit $n \in \mathbf{N}^*$. Soit X une partie finie de $\mathbf{R}$ à n éléments qu'on écrit :
$$X = \{x_1, \ldots, x_n\}\,.$$

1. On pose
$$M_1 = \max(x_1, x_2)$$
et, pour $k \in \{2, \ldots, n\}$, on définit
$$M_k = \max(M_{k-1}, x_k)\,.$$
Montrer que $M_n \in X$ et que M_n est un (le) maximum de X.

2. Montrer que X admet une borne supérieure, notée S.

3. Montrer que le maximum de X est égal à S.

4. Montrer que X possède un minimum et que ce minimum est la borne inférieure de X.